1. *Exercices non-classés*

E.3142

Rappel :
Pour deux entiers relatifs a et b, on dit que a est congru à b modulo 7, et on écrit $a \equiv b \pmod 7$ lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a = b+7k$.

1. *Cette question constitue une restitution organisée de connaissances :*
   a. Soient a, b, c et d des entiers relatifs.
   Démontrer que :
   Si $a \equiv b \pmod 7$ et $c \equiv d \pmod 7$
   alors $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod 7$.
   b. En déduire que : pour a et b entiers relatifs non nuls.
   Si $a \equiv b \pmod 7$ alors pour tout entier naturel n :
   $a^n \equiv b^n \pmod 7$.
2. Pour $a = 2$ puis pour $a = 3$, déterminer un entier naturel n non nul tel que : $a^n \equiv 1 \pmod 7$.
3. Soit a un entier naturel non divisible par 7.
   a. Montrer que : $a^6 \equiv 1 \pmod 7$.
   b. On appelle *ordre* de $a \pmod 7$, et on désigne par k, le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1 \pmod 7$.
   Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1 \pmod 7$.
   En déduire que k divise 6.
   Quelles sont les valeurs possibles de k ?
   c. Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.
4. À tout entier naturel n, on associe le nombre :
   $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$.
   Montrer que : $A_{2006} \equiv 6 \pmod 7$

E.3187

Étant donné un entier naturel $n \geqslant 2$, on se propose d'étudier l'existence de trois entiers naturels x, y et z tels que :
$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1 \pmod{2^n}$

Partie A : Étude de deux cas particuliers :

1. Dans cette question, on suppose que $n = 2$. Montrer que 1, 3 et 5 satisfont à la question précédente.
2. Dans cette question, on suppose $n = 3$.
   a. Soit m un entier naturel. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous donnant le reste r de la division euclidienne de m par 8 et le reste R de la division euclidienne de m^2 par 8.

r	0	1	2	3	4	5	6	7
R								

   b. Peut-on trouver trois entiers naturels x, y et z tels que :
   $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7 \pmod 8$?

Partie B : Étude du cas général où $n \geqslant 3$:

Supposons qu'il existe trois entiers naturels x, y et z tels que :
$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1 \pmod{2^n}$

1. Justifier le fait que les trois entiers naturels x, y et z sont tous impairs ou que deux d'entre eux sont pairs.
2. On suppose que x et y sont pairs et que z est impair. On pose alors :
   $x = 2q \quad ; \quad y = 2r \quad ; \quad z = 2s + 1$
   où q, r, s sont des entiers naturels.
   a. Montrer que : $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1 \pmod 4$.
   b. En déduire une contradiction.
3. On suppose que x, y, z sont impairs.
   a. Prouver que, pour tout entier naturel k non nul, $k^2 + k$ est divisible par 2.
   b. En déduire que : $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3 \pmod 8$.
   c. Conclure.

E.3240 — Partie A

Soit N un entier naturel, impair non premier.
On suppose que $N=a^2-b^2$ où a et b sont deux entiers naturels.

1. Montrer que a et b n'ont pas la même parité.
2. Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q.
3. Quelle est la parité de p et de q?

Partie B

On admet que 250 507 n'est pas premier.
On se propose de chercher des couples d'entiers naturels $(a\,;b)$ vérifiant la relation :

$$(E)\ :\ a^2-250\,507=b^2$$

1. Soit X un entier naturel.
   a. Donner dans un tableau, les restes possibles de X modulo 9 ; puis ceux de X^2 modulo 9.
   b. Sachant que $a^2-250\,507=b^2$, déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2-250\,507$; en déduire les restes possibles modulo 9 de a^2.
   c. Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.
2. Justifier que si le couple $(a\,;b)$ vérifie la relation (E), alors $a\geqslant 501$. Montrer qu'il n'existe pas de solution du type $(501\,;b)$.
3. On suppose que le couple $(a\,;b)$ vérifie la relation (E).
   a. Démontrer que a est congru à 503 ou à 505 modulo 9.
   b. Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple $(505+9k\,;b)$ soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant.

Partie C

1. Déduire des parties précédentes une écriture de 250 507 en un produit deux facteurs.
2. Les deux facteurs sont-ils premiers entre eux?
3. Cette écriture est-elle unique?

E.3319

1. a. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste dans la division euclidienne par 9 de 7^n.
   b. Démontrer alors que : $(2005)^{2005}\equiv 7 \pmod 9$.
2. a. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $(10)^n\equiv 1 \pmod 9$.
   b. On désigne par N un entier naturel écrit en base dix, on appelle S la somme de ses chiffres. Démontrer la relation suivante :
   $N\equiv S \pmod 9$.
   c. En déduire que N est divisible par 9 si, et seulement si, S est divisible par 9.
3. On suppose que $A=(2005)^{2005}$; on désigne par :
   - B la somme des chiffres de A ;
   - C la somme des chiffres de B ;
   - D la somme des chiffres de C.

   a. Démontrer la relation suivante : $A\equiv D \pmod 9$.
   b. Sachant que $2005<10000$, démontrer que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8020 chiffres. En déduire que : $B\leqslant 72180$.
   c. Démontrer que : $C\leqslant 45$.
   d. En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de D plus petit que 15.
   e. Démontrer que : $D=7$.

E.3554

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1. a. Pour $1\leqslant n\leqslant 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.
   b. Démontrer que, pour tout n, $3^{n+6}-3^n$ est divisible par 7.
   En déduire que 3^n et 3^{n+6} ont le même reste dans la division par 7.
   c. À l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de $3^{1\,000}$ par 7.
   d. De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n quelconque?
   e. En déduire que, pour tout entier naturel n, 3^n est premier avec 7.
2. Soit $U_n=1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}=\sum_{i=0}^{n-1}3^i$, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   a. Montrer que si U_n est divisible par 7 alors 3^n-1 est divisible par 7.
   b. Réciproquement, montrer que si 3^n-1 est divisible par 7 alors U_n est divisible par 7.
   En déduire les valeurs de n telles que U_n soit divisibles par 7.

E.3572 On se propose de déterminer les couples $(n\,;m)$ d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation :

$7^n - 3\times 2^m = 1$ (F)

1. On suppose $m \leqslant 4$.
   Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.
2. On suppose maintenant que $m \geqslant 5$.
   a. Montrer que si le couple $(n\,;m)$ vérifie la relation (F) alors :
      $7^n \equiv 1 \pmod{32}$.
   b. En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple $(n\,;m)$ vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4.
   c. En déduire que si le couple $(n\,;m)$ vérifie la relation (F) alors :
      $7^n \equiv 1 \pmod{5}$
   d. Pour $m \geqslant 5$, existe-t-il des couples $(n\,;m)$ d'entiers naturels vérifiant la relation (F) ?
3. Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F).

E.3629 On appelle (E) l'ensemble des entiers naturels qui peuvent s'écrire sous la forme $9+a^2$ où a est un entier naturel non nul ; par exemple :

$10 = 9 + 1^2$; $13 = 9 + 2^2$; ...

On se propose dans cet exercice d'étudier l'existence d'éléments de (E) qui sont des puissances de 2, 3 ou 5.

1. Étude de l'équation d'inconnue a :
   $a^2 + 9 = 2^n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$.
   a. Montrer que si a existe, a est impair.
   b. En raisonnant modulo 4, montrer que l'équation proposée n'a pas de solution.
2. Étude de l'équation d'inconnue a :
   $a^2 + 9 = 3^n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$.
   a. Montrer que si $n \geqslant 3$, 3^n est congru à 1 ou à 3 modulo 4.
   b. Montrer que si a existe, il est pair et en déduire que nécessairement n est pair.
   c. On pose $n = 2p$ où p est un entier naturel, $p \geqslant 2$. Déduire d'une factorisation de $3^n - a^2$, que l'équation proposée n'a pas de solution.
3. Étude de l'équation d'inconnue a :
   $a^2 + 9 = 5^n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.
   a. En raisonnant modulo 3, montrer que l'équation n'a pas de solution si n est impair.
   b. On pose $n = 2p$, en s'inspirant de 2 c démontrer qu'il existe un unique entier naturel a tel que a^2+9 soit une puissance entière de 5.

E.5863 **Partie A**

On considère la fonction `f` issue d'un algorithme où ses arguments prennent pour valeurs des entiers naturels non-nul :

```
Fonction f(a;b)
    c ← 0
    Tant que  a>b
        c ←  c+1
        a ←  a−b
    Fin Tant que
    Renvoyer (c;a)
```

1. Indiquer les valeurs des variables prises successivement lors de l'appel à la fonction `f` avec les valeurs `a`$=13$ et `b`$=4$.
2. Comment interpréter, en fonction des valeurs `a` et `b` fournies en argument, la valeur du couple renvoyé par la fonction `f` lors d'un appel.

Partie B

À chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

Étape 1 : A la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre entier m correspond dans le tableau.

Étape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $9m+5$ par 26 et on le note p.

Étape 3 : Au nombre entier p, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Coder la lettre U.
2. Modifier la fonction `f` de l'algorithme de la partie **A** pour qu'à une valeur de m entrée par l'utilisateur, il renvoie la valeur de p, calculée à l'aide du procédé de codage précédent.

Partie C

1. Trouver un nombre entier x tel que : $9x \equiv 1 \pmod{26}$.
2. Démontrer alors l'équivalence :
   $9m+5 \equiv p \pmod{26} \iff m \equiv 3p-15 \pmod{26}$
3. Décoder alors la lettre B.

E.5960

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $2^{3n}-1$ est un multiple de 7 *(on pourra utiliser un raisonnement par récurrence)*.
   En déduire que $2^{3n+1}-2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2}-4$ est un multiple de 7.
2. Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.
3. Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier :
   $Q_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$
   a. Si $p=3n$, quel est le reste de la division de A_p par 7?
   b. Démontrer que si $p=3n+1$ alors A_p est divisible par 7.
   c. Étudier le cas où $p=3n+2$
4. On considère les nombres entiers a et b écrits dans le système binaire :
   $a = \overline{1\,001\,001\,000}$; $b = \overline{1\,000\,100\,010\,000}$
   Vérifier que ces deux nombres sont des nombres de la forme A_p. Sont-ils divisibles par 7?

E.6795 Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

Afin de crypter un message, on utilise un chiffrement affine. Chaque lettre de l'alphabet est associée à un nombre entier comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Soit x le nombre entier associé à la lettre à coder. On détermine le reste y de la division euclidienne de $7x+5$ par 26, puis on en déduit la lettre associée à y *(c'est elle qui code la lettre d'origine)*.

Exemple :

- M correspondant à $x=12$
- $7\times12+5=89$
- Or $89\equiv11 \pmod{26}$ et 11 correspondant à la lettre L, donc la lettre M est codée par la lettre L.

1. Coder la lettre L.
2. a. Soit k un entier relatif. Montrer que si $k\equiv 7x \pmod{26}$ alors $15\cdot k\equiv x \pmod{26}$.
   b. Démontrer la réciproque de l'implication précédente.
   c. En déduire que $y\equiv7x+5 \pmod{26}$ équivaut à $x\equiv 15\cdot y+3 \pmod{26}$.
3. À l'aide de la question précédente décoder la lettre E.

Partie B

On considère les suites (a_n) et (b_n) telles que a_0 et b_0 sont des entiers compris entre 0 et 25 inclus et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 7\cdot a_n + 5 \\ b_{n+1} = 15\cdot b_n + 3 \end{cases}$$

Montrer que pour tout entier naturel n :

$$a_n = \left(a_0 + \frac{5}{6}\right)\times 7^n - \frac{5}{6}$$

On admet pour la suite du problème que pour tout entier naturel n :

$$b_n = \left(b_0 + \frac{3}{14}\right)\times 15^n - \frac{3}{14}$$

Partie C

Déchiffrer un message codé avec un chiffrement affine ne pose pas de difficulté *(on peut tester les 312 couples de coefficients possibles)*. Afin d'augmenter cette difficulté de décryptage, on propose d'utiliser une clé qui indiquera pour chaque lettre le nombre de fois où on lui applique le chiffrement affine de la partie **A**.

Par exemple pour coder le mot MATH avec la clé $2-2-5-6$, on applique "2" fois le chiffrement affine à la lettre M *(cela donne E)*, "2" fois le chiffrement de la lettre A, "5" fois le chiffrement à la lettre T et enfin "6" fois le chiffrement à la lettre H.

Dans cette partie, on utilisera la clé $2-2-5-6$.
Décoder la lettre Q dans le mot $IYYQ$.