

1. Exercices non-classés

E.3597



Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009, c'est-à-dire tel que $n^3 \equiv 2009 \pmod{10\,000}$.

Partie A

- 1 Déterminer le reste de la division euclidienne de 2009^2 par 16.
- 2 En déduire que : $2009^{8\,001} \equiv 2009 \pmod{16}$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2009^2 - 1$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1$.

- 1
 - a Démontrer que u_0 est divisible par 5.
 - b Démontrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n \cdot \left[u_n^4 + 5 \cdot (u_n^3 + 2 \cdot u_n^2 + 2 \cdot u_n + 1) \right]$$
 - c Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , u_n est divisible par 5^{n+1} .
- 2
 - a Vérifier que $u_3 = 2009^{250} - 1$ puis en déduire que $2009^{250} \equiv 1 \pmod{625}$.
 - b Démontrer alors que : $2009^{8\,001} \equiv 2009 \pmod{625}$

Partie C

- 1 En utilisant le théorème de Gauss et les résultats établis dans les questions précédentes, montrer que : $2009^{8\,001} - 2009$ est divisible par 10 000.
- 2 Conclure, c'est-à-dire déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009.

E.3631



Les trois parties I, II, III peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Partie I

Soit : $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

Déterminer les paires $\{a; b\}$ d'entiers distincts de E tels que le reste de la division euclidienne de ab par 11 soit 1.

Partie II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

- 1 L'entier $(n-1)!$ est-il pair?
- 2 L'entier $(n-1)!+1$ est-il divisible par un entier naturel pair?
- 3 Prouver que l'entier $(15-1)!+1$ n'est pas divisible par 15.
- 4 L'entier $(11-1)!+1$ est-il divisible par 11?

Partie III

Soit p un entier naturel non premier ($p \geq 2$).

- 1 Prouver que p admet un diviseur q ($1 < q < p$) qui divise $(p-1)!$
- 2 L'entier q divise-t-il l'entier $(p-1)!+1$?
- 3 L'entier p divise-t-il l'entier $(p-1)!+1$?

E.3208



Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point :

Proposition 1 : "pour tout entier naturel n , 3 divise l'entier $2^{2n}-1$ ".

Proposition 2 : "si un entier relatif x est solution de l'équation $x^2+x \equiv 0 \pmod{6}$ alors $x \equiv 0 \pmod{3}$ ".

Proposition 3 : "l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x; y)$ solutions de l'équation $12x-5y=3$ est l'ensemble des couples :

$$(4+10k; 9+24k) \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

Proposition 4 : "Il existe un seul couple $(a; b)$ de nombres entiers naturels, tel que :

$$a < b \quad ; \quad \text{PPCM}(a, b) - \text{PGCD}(a, b) = 1$$

Deux entiers naturels M et N sont tels que M a pour écriture abc en base dix et N a pour écriture bca en base dix.

Proposition 5 : "Si l'entier M est divisible par 27 alors l'entier $M-N$ est aussi divisible par 27".

E.3321



- 1 On considère l'ensemble : $A_7 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
 - a Pour tout élément a de A_7 écrire dans le tableau ci-dessous l'unique élément y de A_7 tel que :
 $a \cdot y \equiv 1 \pmod{7}$.

a	1	2	3	4	5	6
y						6
 - b Pour x entier relatif, démontrer que l'équation $3 \cdot x \equiv 5 \pmod{7}$ équivaut à $x \equiv 4 \pmod{7}$.
 - c Si a est un élément de A_7 , montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $a \cdot x \equiv 0 \pmod{7}$ sont les multiples de 7.

- 2 Dans toute cette question, p est un entier premier supérieur ou égal à 3. On considère l'ensemble $A_p = \{1; 2; \dots; p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p . Soit a un élément de A_p .

- a Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation :
 $a \cdot x \equiv 1 \pmod{p}$.
- b On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p . Démontrer que r est l'unique solution x dans A_p , de l'équation $a \cdot x \equiv 1 \pmod{p}$.
- c Soit x et y deux entiers relatifs. Démontrer que $x \cdot y \equiv 0 \pmod{p}$ si, et seulement si, x est un multiple de p ou y est un multiple de p .

- d Application : $p=31$.

Résoudre dans A_{31} les équations :

$$2x \equiv 1 \pmod{31} \quad ; \quad 3x \equiv 1 \pmod{31}$$

À l'aide des résultats précédents, résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $6x^2-5x+1 \equiv 0 \pmod{31}$.

E.3626



- 1 On se propose, dans cette question, de déterminer tous les entiers relatifs N tels que :

$$\begin{cases} N \equiv 5 \pmod{13} \\ N \equiv 1 \pmod{17} \end{cases}$$

- a Vérifier que 239 est solution de ce système.
- b Soit N un entier relatif solution de ce système. Démontrer que N peut s'écrire sous la forme :
 $N = 1 + 17 \cdot x = 5 + 13 \cdot y$
 où x et y sont deux entiers relatifs vérifiant la relation $17x - 13y = 4$.
- c Résoudre l'équation $17 \cdot x - 13 \cdot y = 4$ où x et y sont des entiers relatifs.

- d En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que :
 $N = 18 + 221 \cdot k$.

- e Démontrer l'équivalence entre :

$$N \equiv 18 \pmod{221} \quad \text{et} \quad \begin{cases} N \equiv 5 \pmod{13} \\ N \equiv 1 \pmod{17} \end{cases}$$

- 2 **Indication :** Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

- a Existe-t-il un entier naturel k non-nul tel que :
 $10^k \equiv 1 \pmod{17}$?
- b Existe-t-il un entier naturel ℓ tel que :
 $10^\ell \equiv 18 \pmod{221}$?