

1. Nombres de diviseurs

E.9073   

Définition : soit a et b deux entiers positifs. On dit que b est un **diviseur** du nombre a s'il existe un entier k tel que :
 $a = k \times b$

① Si possible, compléter les pointillés ci-dessous à l'aide d'entiers :

a $18 = 1 \times \dots$ b $18 = 2 \times \dots$ c $18 = 3 \times \dots$

d $18 = 4 \times \dots$ e $18 = 5 \times \dots$ f $18 = 6 \times \dots$

g $18 = 7 \times \dots$ h $18 = 8 \times \dots$ i $18 = 9 \times \dots$

② Donner l'ensemble des diviseurs du nombre 18.

E.9074   

a Donner les 2 diviseurs du nombre 13.

b Donner les 6 diviseurs de l'entier 12.

c Donner les 4 diviseurs de l'entier 22.

E.9075   

① a Donner tous les diviseurs de l'entier 8.

b Donner tous les diviseurs de l'entier 9.

② Donner les 12 diviseurs de l'entier 8×9 .

E.9322     Dire si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :

Affirmation : pour tous les entiers entiers n compris entre 2 et 9, $2^n - 1$ est un entier premier.

E.9326     Déterminer le plus petit nombre entier positif impair qui admet trois diviseurs premiers différents. Expliquer votre raisonnement.

2. Entiers premiers

E.9076    Le tableau ci-dessous présente les entiers de 2 à 99 :

		2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

① a Entourer l'entier 2.
 b Hachurer les cases dont l'entier admet 2 pour diviseur.

② a Entourer l'entier 3.
 b Hachurer les cases dont l'entier admet 3 pour diviseur.

③ a Répéter les instructions précédentes avec les entiers 5 et 7.

b Entourer tous les nombres non hachurés de la grille.

④ a Combien de diviseurs admettent les entiers 2, 3, 5, 7, 11?

b Parmi les entiers 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 47, lesquels appartiennent à une table de multiplication? Si oui, laquelle?

c Pour quelle raison peut-on dire que le nombre 97

n'admet que deux diviseurs 1 et 97?

Définition : on dit qu'un entier a est **premier** s'il admet exactement 2 diviseurs : 1 et lui-même.

Exemple : les entiers 2, 3, 5, 7, 11, 13 sont des entiers premiers.

Remarque : cet exercice présente la méthode dite du "crible d'Ératosthène" permettant de déterminer rapidement les entiers premiers parmi 2 à 99. Ératosthène est un scientifique grec du 2^e siècle avant JC. Il est connu pour avoir été nommé directeur de la bibliothèque d'Alexandrie et pour avoir été le premier à avoir mesuré la circonférence de la Terre. Vous trouverez un diaporama présentant le crible d'Ératosthène dans le lien ci-contre.



E.9077   

① Parmi les entiers suivants, lequel n'est pas un entier premier : 31 ; 33 ; 37 ; 41.

② Parmi les entiers suivants, lequel n'est pas un entier premier : 43 ; 47 ; 49 ; 53.

Vous trouverez dans le lien ci-contre la liste des entiers premiers inférieurs ou égal à 1 000.



E.9078    Chacune des affirmations ci-dessous est fausse. Pour chacune de ces affirmations, trouver un contre-exemple pour infirmer celle-ci :

① La somme de deux entiers premiers est un entier premier.

② La multiplication de deux entiers premiers est un entier premier.

③ Tous les entiers impairs sont des entiers premiers.

3. Décomposition d'un entier en produit de nombres premiers

E.9079   

Définition : on dit qu'un entier est **décomposé en produit d'entiers premiers** s'il est écrit comme un produit dont tous les facteurs sont des entiers premiers.

Exemple : l'entier 72 admet la décomposition : $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

Algorithme : ci-contre une méthode d'obtention de la décomposition d'un entier en produit d'entiers premiers :

$$\begin{aligned}
 72 &= 2 \times 36 \\
 72 &= 2 \times 2 \times 18 \\
 72 &= 2 \times 2 \times 2 \times 9 \\
 72 &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3
 \end{aligned}$$

- 1 Utiliser l'égalité $28 = 2 \times 14$ pour obtenir la décomposition en produit d'entiers premiers de l'entier 28.
- 2 Utiliser l'égalité $40 = 2 \times 20$ pour obtenir la décomposition en produit d'entiers premiers de l'entier 40.
- 3 Utiliser l'égalité $96 = 2 \times 48$ pour obtenir la décomposition en produit d'entiers premiers de l'entier 96.

E.9080    Pour chacun des entiers 198, 297, 462, déterminer leur décomposition en produit d'entiers premiers.

Indications : pour cela, on utilisera les égalités :

○ $198 = 6 \times 33$ ○ $297 = 9 \times 33$ ○ $462 = 14 \times 33$

E.9081    

- 1 Justifier que le nombre 102 est divisible par 3.
- 2 Décomposer 102 en produits de facteurs premiers.
- 3 Donner 3 diviseurs non premiers du nombre 102.

E.9321     Quel est le plus grand entier premier qui divise 41 895?

E.9324    

- 1
 - a Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers de 2744.
 - b Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers de 2744^2 .
 - c À l'aide de cette décomposition, trouver x tel que : $x^3 = 2744^2$
- 2 Soient a et b deux nombres entiers supérieurs à 2 tels que : $a^3 = b^2$
 - a Calculer b lorsque $a = 100$.
 - b Déterminer deux nombres entiers a et b supérieurs à 2 et inférieurs à 10 qui vérifient l'égalité $a^3 = b^2$.

4. Simplification de fractions

E.9082   

- 1 Donner la décomposition en produit de facteurs premiers des entiers ci-dessous : 42 ; 90
- 2 En déduire l'écriture réduite de la fraction $\frac{42}{90}$.

E.9083    

- 1 Décomposer 140 et 870 en produit de facteurs premiers.

- 2 En déduire la forme irréductible de la fraction $\frac{140}{870}$

E.9084    

- 1 Décomposer, sans justifier, en produit de facteurs premiers les nombres 1 386 et 1 716.
- 2 En déduire la forme irréductible de la fraction : $\frac{1\,386}{1\,716}$